

GEOMETRIAI HOZZÁRENDELÉSEK

ELMÉLET

1. A **geometriai hozzárendések** (más szóval: geometriai leképezések) olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

Ezek közül különösen fontosak azok a hozzárendések, amelyek kölcsönösen egyértelműek, valamint az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a ponthalmaz. Ezeket **geometriai transzformációknak** nevezzük. Ezek közé tartoznak a tanult egybevágósági transzformációk és a hasonlóság is.

Az egybevágósági transzformációk (tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli elforgatás, párhuzamos eltolás) és a középpontos hasonlóság esetén érvényes, hogy egyenes képe egyenes, szakasz képe szakasz, háromszög képe háromszög, kör képe kör.

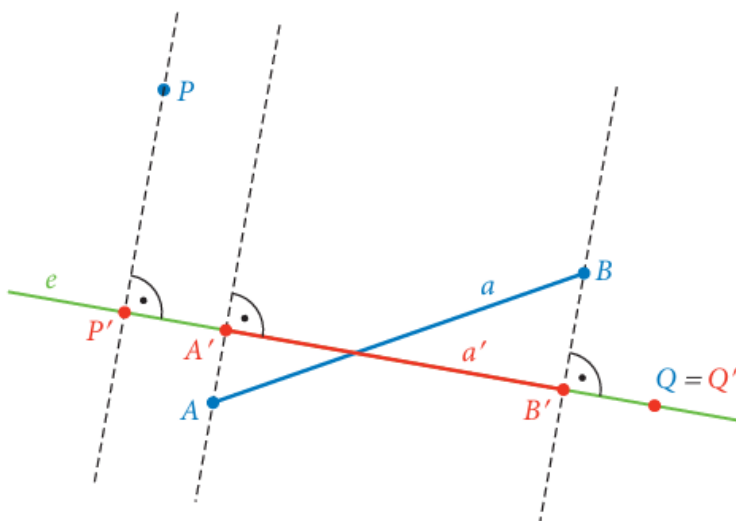
Az előbbi tulajdonságok mellett az említett transzformációk mindegyikében speciálisabb tulajdonságokat is megfogalmaztunk az eredeti és a képként kapott alakzatokra vonatkozóan. Az egybevágósági transzformációk esetén például érvényben van a szakasztartó, távolságtartó, szögtartó tulajdonság, míg a középpontos hasonlóság esetén a távolságtartás helyett az aránytartás teljesül.

2. Vannak másféle geometriai hozzárendések is.

A műszaki gyakorlatban például a testek ábrázolására a vetületi ábrázolást használják. Ilyenkor egy térbeli test pontjainak képe egy síkbeli alakzat, vagyis az értelmezési tartomány és az értékkészlet dimenziója nem azonos, a dimenzió csökken: a teret egy síkra képezzük le. Ezek a vetületi ábrázolások legtöbbször sem a távolságot, sem az arányt nem őrzik meg.

A tárgyról merőleges vetítéssel kialakított, síkban fekvő geometriai alakzatokat **vetületnek**, ezt a vetítési módot **merőleges vetítésnek** nevezzük. A sík elhelyezkedésétől függően beszélhetünk előlnézeti, felülnézeti vagy oldalnézeti képről.

A síkbeli merőleges vetítés során a sík pontjait a sík egy egyenesére vetítjük. Ezt szemlélteti az ábra.

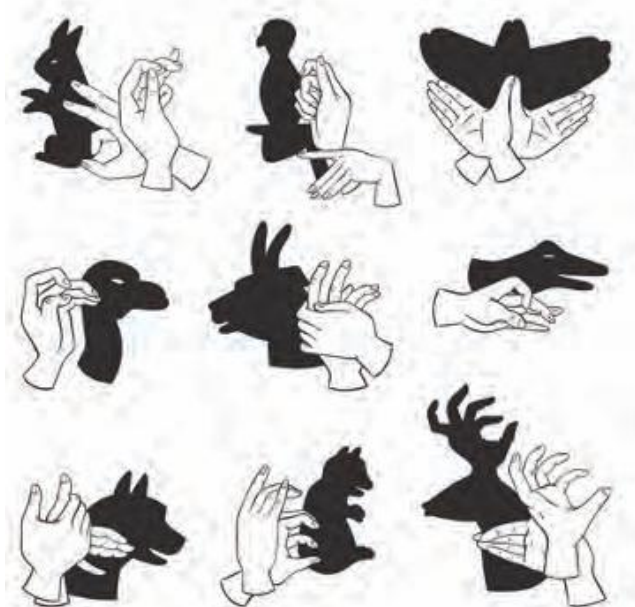


BEVEZETŐ

1. Kéz árnyéka kéz?

Dinoszaurusz alakú árnyképe csak dinoszaurusznak lehet?

Ezt a csalóka illúziót használják ki az árnyjátékot professzionálisan megjelenítő művészek, akik valójában a tér pontjait a tér egy síkjára vetítik le előre elkészített koreográfia alapján.



2. Napóra

A napóra egy érdekes geometriai hozzárendelésen alapuló időmérő eszköz. Az eszköz használatakor a Nap mozgását és az ez által létrehozott különböző állású, pillanatnyi árnyék képét figyelik meg, és annak segítségével határozzák meg a helyi időt.

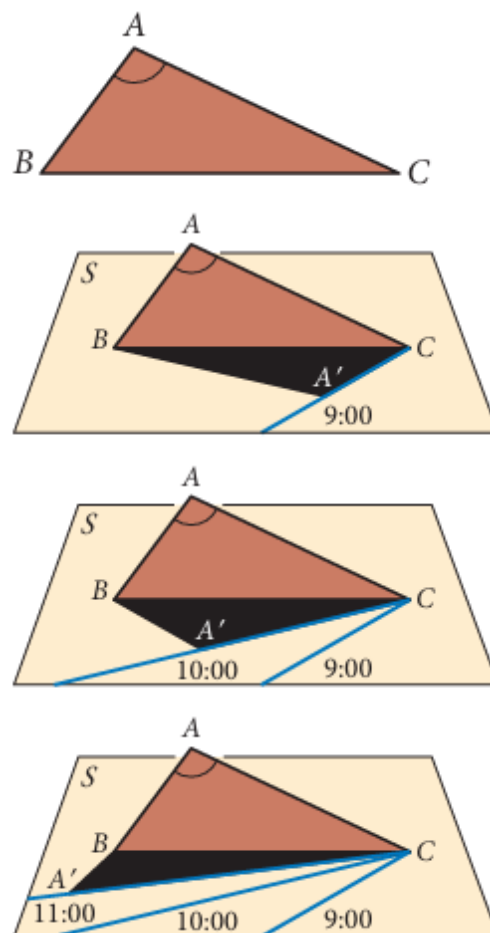
A Nap mérete és a Földtől való távolsága miatt a Napból a Földre érkező sugarakat tekinthetjük egymással párhuzamosnak.

Ha egy térbeli alakzatot egy rögzített képsíkra egy adott iránnyal párhuzamos fénysugarakkal vetítünk, akkor **párhuzamos vetítést** hozunk létre. Ez a leképezés a napóra működési elvének alapja.

Az alábbi rajzok a napóra sematikus képét mutatják.

Az i. e. 5. századtól egészen a középkorig a napórák adtak lehetőséget a helyi idő legpontosabb meghatározására nappal, derült időben.

A napóra nem csak az időmérő eszköz, hanem művészeti alkotás, építészeti és műszaki alkotás szerepét is betöltötte az évszázadok során.



FELADATOK

1. Az alábbi ábrákon egy-egy példát látunk a sík egyenesre történő merőleges vetítésére.

Gondoljuk végig az ábrák alapján, hogy miért igazak a következő állítások!

- a) Pont képe pont.
- b) Szakasz képe lehet pont.
- c) Van olyan szakasztól különböző alakzat, amelynek képe szakasz.
- d) Egy szakasz merőleges vetülete legfeljebb olyan hosszú, mint az eredeti szakasz.
- e) Körvonal képe szakasz.

Megoldás:

a) **Pont képe pont.**

1. ábra:

Ha az A pontból merőlegest állítunk az e egyenesre, az pontosan egyetlen pontban (A') fogja metszeni azt. Egyetlen kiinduló pontnak nem lehet több vetített képe, így a képe mindig egy pont marad.

b) **Szakasz képe lehet pont.**

4. ábra:

Képzeld el, hogy egy egyenes botot függőlegesen tartunk a föld felett, amikor a nap pontosan felülről süt. A bot árnyéka a földön csak egyetlen pici pont lesz.

Ha a szakasz pontosan merőleges a vetítőegyenest, akkor a szakasz összes pontja ugyanabba az egyetlen pontba fog levetítődni. A 4. ábrán az AB szakasz pontosan ilyen: a képe az $A'=B'$ pont.

c) **Van olyan szakasztól különböző alakzat, amelynek képe szakasz.**

3. ábra:

Egy görbe vonalat (ívet) látunk az A és B pontok között.

Amikor a görbe minden pontját merőlegesen levetítjük az egyenesre, a kapott pontok pontosan kitöltik az A' és B' közötti egyenes részt. Vagyis egy hullámos vonal vagy görbe "árnyéka" is lehet egy teljesen egyenes szakasz.

d) **Egy szakasz merőleges vetülete legfeljebb olyan hosszú, mint az eredeti szakasz.**

2. ábra:

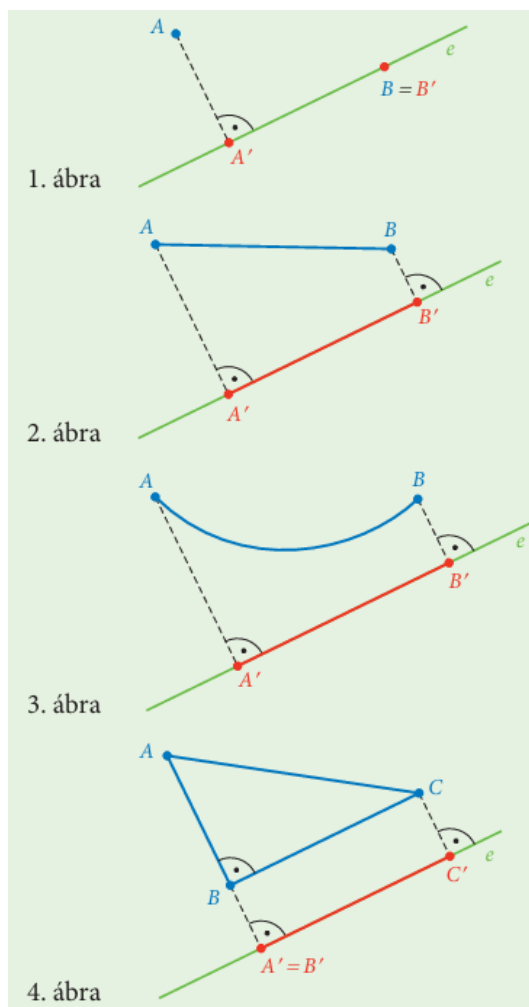
Mivel a vetítővonalak merőlegesek, egy derékszögű háromszög (vagy trapéz) keletkezik. A ferdén álló szakasz olyan, mint egy lejtő: mindig hosszabb, mint a vízszintes alapja.

- Ha a szakasz párhuzamos az egyenessel, a vetülete **ugyanolyan hosszú** lesz.
- Ha a szakasz kicsit ferdén áll, a vetülete **rövidebb** lesz.
- Ha teljesen merőlegesen áll, a vetülete **nulla hosszúságú** (egy pont) lesz.

Tehát a vetület hossza *soha nem lehet nagyobb* az eredetinel, legfeljebb ugyanakkora.

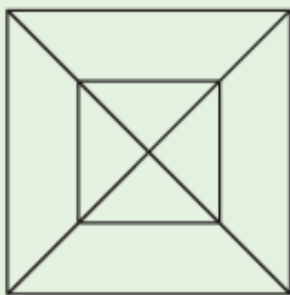
e) **Körvonal képe szakasz.**

Képzeld el, hogy egy karikát (hulahopp karikát) oldalról világítunk meg a fallal párhuzamosan. A falon megjelenő árnyék nem kör lesz, hanem egy egyenes szakasz!

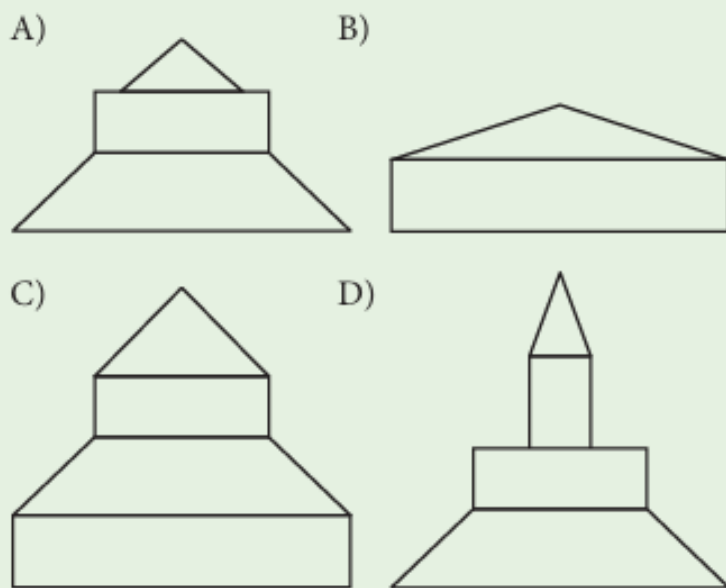


2 (Kompetenciamérés, 2009)

A következő ábrán egy épület felülnézeti képe látható.



Melyik ábra mutathatja az épület oldalnézeti képét?



Megoldás: **helyes válasz az A) ábra.**

A felülnézeti kép elemzése (belülről kifelé):

A felülnézeti rajzon koncentrikus (egymásba ágyazott) négyzeteket és vonalakat látunk. Bontsuk szét az épületet 3 szintre.

1. **A legfelső szint (középen):** Egy négyzetet látunk, aminek a csúcsait egy „X” alakú kereszt köti össze a középponttal. Ez felülnézetből egy **gúla (piramis alakú tető)** képe. Tehát az épület legtetején egy gúla van.
2. **A középső szint:** A gúla alatt egy sima, üres négyzetgyűrűt látunk, függőleges vagy ferde törésvonalak nélkül. Ez egy **hasáb (függőleges falú épületrész)**, aminek a tetejére épült rá a gúla. Oldalról nézve ez egy sima téglalapként fog megjelenni.
3. **A legalsó szint (kívül):** A legkülső négyzet és a középső négyzet sarkait átlós vonalak kötik össze. Ez egy olyan rész, ami lefelé haladva folyamatosan szélesedik – vagyis egy **csonkagúla (ferde falszerkezet)**. Oldalról nézve ennek a formája egy trapéz.

A szintek összeillesztése oldalnézetben:

Ha lentől felfelé haladunk az épület oldalnézetével, a következő formákat kell látnunk egymáson:

- **Alul:** Egy szélesedő **trapéz** (az alsó csonkagúla miatt).
- **Középen:** Egy függőleges falú **téglalap** (a középső hasáb miatt).
- **Felül:** Egy háromszög alakú **gúla (tető)**.

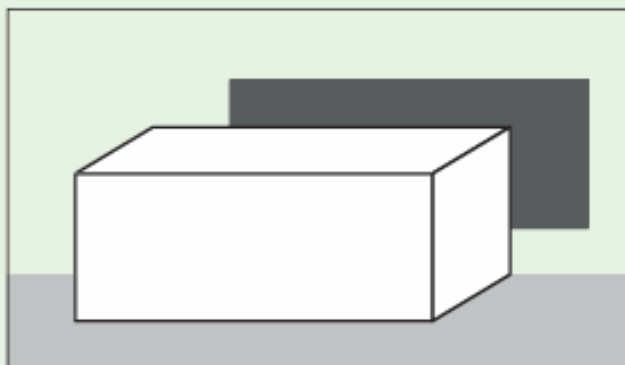
Ez a hármas kombináció (trapéz alul, téglalap középen, háromszög felül) egyedül az **A)** ábrán látható tökéletesen.

Miért hibás a többi lehetőség?

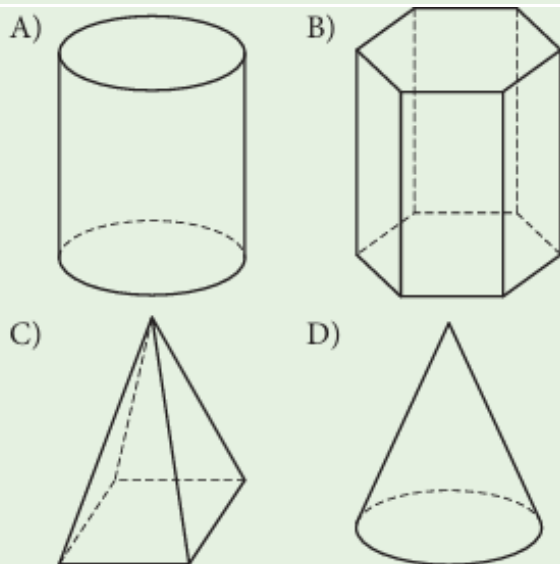
- **B):** Ez csak egyetlen szintet mutat (egy hasábot egy nagyon lapos tetővel).
- **C):** Itt a legalsó szint alján van egy függőleges rész (téglalap), ami hiányzik a felülnézeti képről.
- **D):** Ez egy 4 szintes épületet ábrázol egy plusz, nagyon keskeny toronnyal a tetején, ami nem szerepel a felülnézeti alaprajzon.

3. (Kompetenciamérés, 2013)

Tomí különböző testeket világított meg, és megfigyelte a falon kirajzolódó árnyékukat.



Melyik test NEM adhat árnyékként téglalapot? Válaszd ki a megfelelő ábra betűjelét!



Megoldás: helyes válasz a D) kúp.

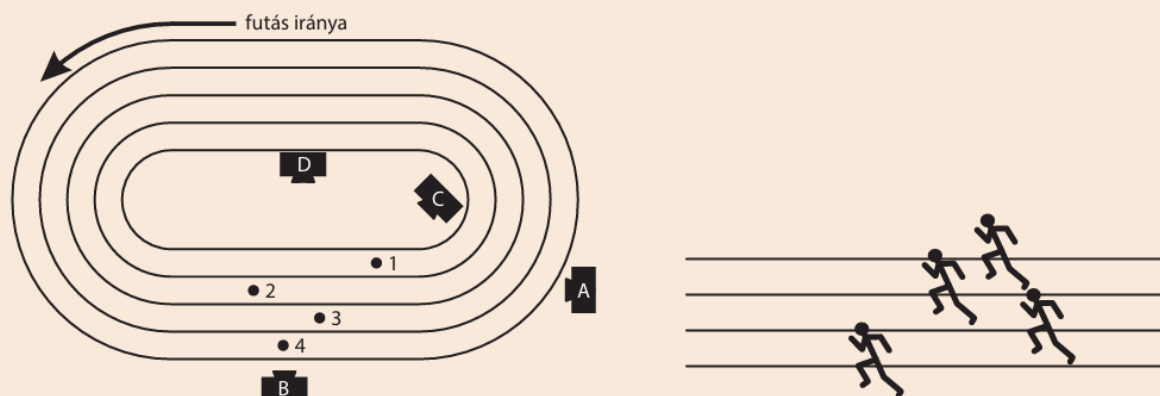
Nézzük meg részletesen, melyik test milyen árnyékot tud adni:

- A) Henger: Ha a hengert a talpára állítjuk, és oldalról világítjuk meg, a falon megjelenő árnyéka egy tökéletes téglalap lesz. (Ha felülről világítanánk meg, akkor kört kapnánk).
- B) Hatszög alapú egyenes hasáb: Ha ezt a hasábot oldalról világítjuk meg (úgy, hogy a fény az egyik lapjára merőlegesen essen), a falra vetülő körvonala szintén egy téglalap lesz, hiszen az oldallapjai téglalapok, és a teteje/alja párhuzamos egyenes vonalat alkot az árnyékban.
- C) Négyzet alapú gúla: Elsőre talán meglepő, de a gúla is tud téglalap árnyékot adni! Ha a gúlát pontosan a négyzet alakú alaplajára fektetjük (tehát az alaplajja néz a fal felé), és a fény szemből éri, akkor a falon kirajzolódó árnyék az alaplaj formája, azaz egy négyzet lesz. Mivel minden négyzet egyben speciális téglalap is, így ez a test is képes téglalap alakú árnyékot vetni.
- D) Kúp: A kúpnak mindössze kétféle alapvető árnyéka lehet attól függően, hogyan forgatjuk a fényben.
 - Ha a **talpára állítjuk** és oldalról világítjuk meg, az árnyéka egy **háromszög** lesz (mivel a csúcsa egy pontba fut össze).
 - Ha az **alaplajját fektetjük a fal felé**, az árnyéka egy **kör** (vagy ovális/ellipszis) lesz.

Mivel a kúp oldala a csúcsa felé folyamatosan szűkül, oldalról nézve soha nem tud két párhuzamos függőleges oldalt produkálni. Így a kúpból semmilyen trükkel **nem lehet téglalap alakú árnyékot „csalni”**.

2 (Kompetenciamérés, 2017)

A zedországi 1500 méteres síkfutást négy kameraállásból rögzíti a televízió. A következő ábra az 1, 2, 3, 4 számokkal jelölt négy futó pozícióját, valamint az A, B, C és D jelű kamerák elhelyezkedését mutatja.



- a) Melyik kamera felvétele alapján készült a következő ábra a futók pozíciójáról?
 b) Állapítsd meg a felső ábra alapján, melyik versenyzőtársát látja a 3-as számmal jelölt futó, ha balra hátrafelé pillant!

Megoldás:

- a) Válasz: **B kamera**

A feladat megoldásához meg kell néznünk a futók **egymáshoz képesti sorrendjét** a kamerák nézőpontjából (balról jobbra haladva a képernyőn).

Nézzük meg először a jobb oldali képet:

- A képernyő **bal szélén** (leghátul) a **legalsó sávban** futó versenyző van.
- A képernyő **jobb széléhez legközelebb** (legelől) a **fentről a második sávban** futó versenyző van.

Most keressük meg azt a kamerát, amelyik pontosan ezt a látványt nyújtja! Ehhez képzeljük magunkat az egyes kamerák helyére, és nézzünk a futók felé:

- **A kamera:** A kanyar széléről néz szemből a futók felé. Számára a pályák lentől felfelé következnek, a futók egymás takarásában lennének, nem így látná őket.
- **D kamera:** A pálya közepéről néz lefelé. Számára a futás iránya jobbról balra tart, így a legelől lévő futóknak a kép bal szélén kellene lenniük.
- **C kamera:** Srégen néz lefelé a kanyar irányába.
- **B kamera:** Alulról néz egyenesen felfelé a pályára.
 - Ha a **B kamera** helyére állunk és felfelé nézünk, a sávok lentől felfelé növekednek (a legkülső sáv van hozzánk legközelebb, a legbelső legmesszebb).
 - Nézzük meg a futók sorrendjét **balról jobbra** a B kamera szemszögéből:
 1. A **bal szélén** a **4-es** számú futót látja (a legkülső sávban).
 2. Tőle kicsit jobbra és feljebb a **3-as** futót látja.
 3. Még jobbra és beljebb a **2-es** futót látja.
 4. A **jobb szélén** (leginkább előrehaladva) pedig az **1-es** futót látja (a legbelső sávban).

Ha ezt összevetjük a jobb oldali ábrával, pontosan ezt látjuk: a legkülső sávban lévő futó van leghátul (balra), és ahogy haladunk befelé a sávokban, úgy vannak egyre kijebb/előrébb a futók jobbra.

- b) Válasz: **2-es számmal jelölt futó**

Képzeljük magunkat a **3-as** futó helyébe:

1. **Futás iránya:** A pálya alsó egyenes szakaszán halad **jobbról balra** (a nyíl mutatja a futás irányát a stadionban). Tehát a 3-as futó arcával balra, a kanyar felé néz.
2. **Mi a hátrafelé?** Mivel balra (előre) fut, a hátrafelé irány neki **jobbra** van (ahonnan jött).
3. **Mi a balra hátrafelé?** Ha egyenesen fut előre, a tőle **balra** eső rész a pálya belseje felé (felfelé az ábrán), a **jobbra** eső rész pedig a pálya külseje felé van (lefelé az ábrán).
4. Ha a futás irányához képest **balra és hátrafelé** tekint (vagyis a belső sávok felé és maga mögé néz), akkor a pálya belseje felé, lemaradva lévő futókat láthatja.

Nézzük meg a pozíciókat a 3-as futó mögötti (jobbra lévő) területen a belső sávokban:

- A 3-as futó mögött, a belső sávok irányában (felfelé és jobbra) az **1-es** és a **2-es** futó helyezkedik el.
- Közülük a **2-es** futó van közelebb a 3-ashoz a szomszédos belső sávban, közvetlenül a háta mögötti zónában, míg az 1-es még beljebb és hátrébb van. Ha a 3-as futó a bal válla felett hátratekint (balra hátra), pontosan a **2-es** futóra fog rálátni.

3 (Kompetenciamérés, 2008)

Az alábbi rajz felülnézetből ábrázol egy tömör, azonos méretű kockákból álló testet. Az is leolvasható a rajzról, hogy a felülnézetben látható oszlopok hány kockát tartalmaznak. Ezt az oszlopok tetején lévő szám jelzi.

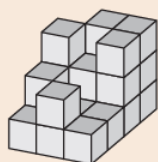
2	3	3
1	2	3
2	1	1
1	2	1

← Oldalnézet

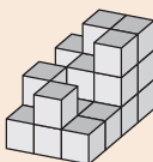
↑
Elölnézet

Melyik alábbi test szerkezetét adja meg a speciális felülnézeti ábra?

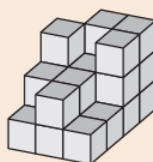
a)



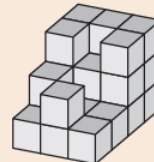
b)



c)



d)



Megoldás: **az a) jelű testét mutatja**

Hogyan olvassuk le a speciális felülnézetet?

A jobb felső sarokban látható négyzetrács az építmény alaprajza.

A rácsban lévő számok azt mutatják meg, hogy az adott helyen hány darab kocka van egymásra pakolva (milyen magas az az oszlop).

A nyilak mutatják, hogy honnan nézzük a testeket az előlnézet és az oldalnézet irányából.

A rajzolt 3D-s opciók mindegyikét szemből-balról látjuk, ami azt jelenti, hogy:

- Az előlnézeti nyíl felénk mutat (a rajzok bal-elülső oldala).
- Az oldalnézeti nyíl jobbról mutatja a testet (a rajzok jobb-oldalsó oldala).

Ellenőrizzük a magasságokat az Elölnézet (alsó nyíl) alapján!

Nézzük meg az alaprajzot alulról felfelé haladva a három függőleges oszlopvonal (sáv) mentén:

- Bal oldali sáv: A kockaoszlopok magassága szemből hátrafelé haladva: 1, 2, 1, 2.
Ez azt jelenti, hogy a legelső sorban **a bal szélén 1 kocka magas oszlopnak kell lennie.**
- Középső sáv: A magasságok: 2, 1, 2, 3.
A legelső sor közepén egy 2 kocka magas oszlop áll.
- Jobb oldali sáv: A magasságok: 1, 1, 3, 3.
A legelső sor jobb szélén egy 1 kocka magas oszlop áll.

Keressük meg, melyik 3D-s ábra mutatja a legelső sorban pontosan a 1, 2, 1 magasságú oszlopokat:

a) ábra: Bal szél = 1, Közép = 2, Jobb szél = 1. → Tökéletes!

b) ábra: Bal szél = 1, Közép = 1, Jobb szél = 1. → Hibás (a középső csak 1 magas).

c) ábra: Bal szél = 1, Közép = 2, Jobb szél = 2. → Hibás (a jobb szélső 2 magas).

d) ábra: Bal szél = 2, Közép = 2, Jobb szél = 1. → Hibás (a bal szélső 2 magas).

Már az első sor ellenőrzésével egyértelműen kiesett a b), c) és d) opció!